CHAPITRE 6 : Mouvement dans un champ de force centrale. Champ newtonien

L'objet de ce chapitre est l'étude du mouvement d'un point matériel soumis à une force centrale conservative et plus particulièrement à une force newtonienne. Les champs newtoniens sont de première importance puisqu'ils régissent les mouvements des planètes autour du soleil et qu'ils interviennent lors de l'interaction entre deux particules chargées.

1. Définition

Un champ de forces centrales est un champ dont les supports passent toujours par un point fixe donné de l'espace (point appelé centre de forces) et telles que leurs intensités ne dépendent que de la distance entre ce centre et les points d'application de ces forces.

Exemples :

- ✓ la tension du ressort
- ✓ la force gravitationnelle :

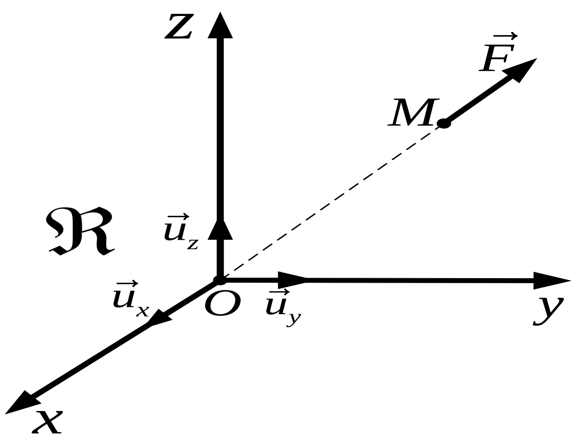
$$\vec{F} = -\frac{GmM}{r^2}\vec{u}_r$$

- ✓ la force coulombienne

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}\vec{u}_r$$

- ✓ la tension du fil dans le pendule simple

Son expression en coordonnées sphériques s'écrit :$\vec{F} = F(r,\theta,\varphi)\vec{u}_r$ avec $\vec{u}_r = \overrightarrow{OM}/r$



2. Moment cinétique, loi des aires

2.1. Moment cinétique

Considérons un référentiel galiléen $\mathcal{R}$ et un champ de forces centrales $\vec{F}(M)$ de centre O immobile dans $\mathcal{R}$. Comme $\overrightarrow{OM}$ et $\vec{F}(M)$ sont parallèles, on obtient la relation suivante :

$$\left(\frac{d\vec{\sigma}_{o/\mathcal{R}}(M)}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}(M) = r\vec{u}_r \wedge F\vec{u}_r = \vec{0} \Longrightarrow \vec{\sigma}_{o/\mathcal{R}}(M) = \overrightarrow{cte} = \overrightarrow{L_0}$$

Dans un référentiel galiléen, lorsqu'un point M est soumis à l'action d'une force centrale le moment cinétique du point M noté $\vec{\sigma}_{o/\mathcal{R}}(M)$, calculé au centre de forces O est un vecteur constant au cours du mouvement :

$$\boxed{\vec{\sigma}_{o/\mathcal{R}}(M) = \overrightarrow{cte}}$$

Le moment cinétique d'une force centrale est conservatif.

2.2. Planéité de la trajectoire

À chaque instant, le moment cinétique est constant $\Longrightarrow \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v} = \overrightarrow{L_0} = \overrightarrow{cte}$. $\overrightarrow{L_0}$ est déterminé par les conditions initiales $\overrightarrow{OM}$ et $\vec{v}$ à $t = 0$. Donc à chaque instant le vecteur $\overrightarrow{OM}$ est perpendiculaire au vecteur constant $\overrightarrow{L_0}$. O est fixe cela veut dire que le point M se déplace dans le plan perpendiculaire à $\overrightarrow{L_0}$ et qui contient le plan.

Dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}$, la trajectoire d'un point M soumis à un champ de forces centrale est plane : elle se situe dans le plan perpendiculaire à $\overrightarrow{L_0}$ et qui contient le centre de forces O.

2.3. Loi des aires

Puisque le mouvement est effectué dans un plan deux coordonnées suffisent pour repérer la position du point M dans ce plan. Il est alors judicieux d'utiliser les coordonnées polaires (r, θ) et placer le centre de forces à l'origine du référentiel.

$$\vec{F}(M) = F(r)\vec{u}_r \qquad\qquad \overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r$$

$$\vec{v}(M) = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta$$

Le moment cinétique s'écrit :

$$\vec{\sigma}_{o/\mathcal{R}}(M) = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}_{\mathcal{R}}(M) = r\vec{u}_r \wedge m\left(\dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta\right) = mr^2\dot{\theta}\vec{u}_z$$

$$\vec{\sigma}_{o/\mathcal{R}}(M) = \overrightarrow{cte} \Longrightarrow \vec{\sigma}_{o/\mathcal{R}}(M) = mr^2\dot{\theta}\vec{u}_z = \overrightarrow{L_0} = L_0\vec{u}_z \Longrightarrow L_0 = mr^2\dot{\theta} \Longrightarrow \boxed{\boldsymbol{C = \frac{L_0}{m} = r^2\dot{\theta}}}$$

C **est appelé constante des aires.**

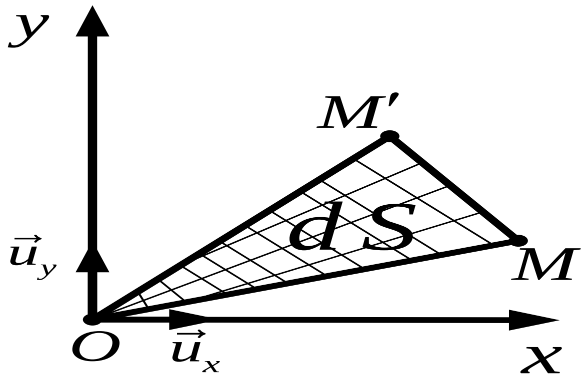
<u>Remarques</u>:

- ✓ Généralement C est déterminé par les conditions initiales :

$$C = (\overrightarrow{OM}_0 \wedge \vec{v}_0).\vec{u}_z$$

- ✓ Si $\vec{\sigma}_{o/\mathcal{R}}(M) = \vec{0} \Longrightarrow \dot{\theta} = 0 \Longrightarrow$ le mouvement se fait dans la direction de $\vec{u}_r$: c'est un mouvement rectiligne

- Evaluons l'aire balayée par le rayon vecteur $\overrightarrow{OM}$ lorsqu'il passe de $M(r,\theta)$ à $M(r+dr,\theta+d\theta)$ ou entre les instants t et $t+dt$



$$dS = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{OM} \wedge d\overrightarrow{OM}\| = \frac{1}{2}\|r\vec{u}_r \wedge (dr\,\vec{u}_r + rd\theta\,\vec{u}_\theta)\| \Longrightarrow \boxed{\boldsymbol{dS = \frac{1}{2}r^2 d\theta}}$$

On définit **la vitesse aréolaire** par dS/dt et correspond à la vitesse à laquelle la surface est balayée par le rayon vecteur $\overrightarrow{OM}$:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta} = \frac{C}{2} = \frac{L_0}{2m} = cte \Longrightarrow \boxed{\boldsymbol{dS = \frac{C}{2}dt}}$$

C'est la loi des aires.

Dans un mouvement à force centrale, le rayon vecteur balaie des surfaces égales pendant des intervalles de temps égaux. *M* accélère lorsqu'il se rapproche du centre de force et ralentit lorsqu'il s'en éloigne.

- Exercices d'applications

1) Montrer que si la trajectoire d'un point soumis à une force centrale est un cercle, le mouvement de ce point est alors uniforme.
2) Un satellite se trouve à une altitude de $4.10^2 Km$. La fusée porteuse lui imprime alors une vitesse $\vec{v}_0$ de norme $9\,Km/s$ faisant un angle de 85° avec la direction radiale. Calculer l'aire balayée par le rayon vecteur $\overrightarrow{OM}$ chaque minute ($R_T = 6{,}4.10^3 Km$).

3. Etude énergétique

Nous allons nous intéresser au cas où la force centrale ne dépend que de la distance r au point O appelé pôle : $\vec{F} = F(r)\vec{u}_r$

3.1. Energie mécanique

Considérons le cas où $\vec{F}$ dérive d'une énergie potentielle E_P ne dépendant que de la position de M par rapport O, $E_p(r)$: donc $\vec{F}$ est conservative.

$$dE_p = -\vec{F}.d\overrightarrow{OM} \Longrightarrow dE_P = -F(r)dr \Longrightarrow E_P(r) = -\int F(r)dr + cte$$

Si nous supposons aussi que M n'est soumis qu'à cette force centrale et si $\mathcal{R}$ est un référentiel galiléen, l'énergie mécanique dans $\mathcal{R}$ est constante d'où :

$$E_m = E_C + E_P(r) = \frac{1}{2}mv^2 + E_P(r) = \frac{1}{2}m\left[\dot{r}^2 + \left(r\dot{\theta}\right)^2\right] + E_P(r)$$

$$\Longrightarrow E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + E_P(r) = cte$$

$$C = r^2\dot{\theta} \Longrightarrow \dot{\theta} = \frac{C}{r^2} \Longrightarrow \boxed{\boldsymbol{E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2} + E_P(r)}}$$

3.2. Energie potentielle efficace

L'énergie potentielle efficace ne dépend que de r et est définie par $E_{Peff}(r)$:

$$\boxed{\boldsymbol{E_{Peff}(r) = \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2} + E_P(r)}}$$

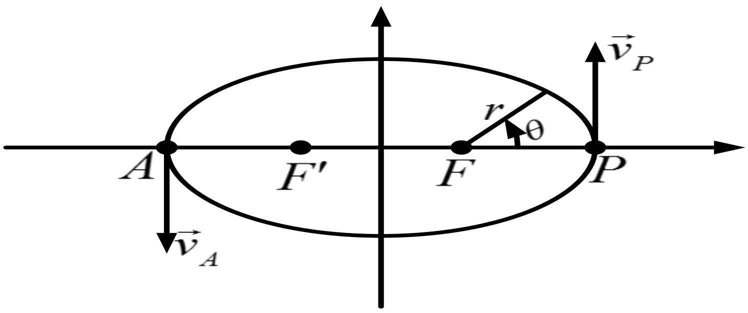
D'où

$$\boxed{\boldsymbol{E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + E_{Peff}(r)}}$$

C'est l'intégrale première de l'énergie

<u>Remarques</u> :

- ✓ $E_C = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 \geq 0 \Longrightarrow E_m \geq E_{Peff}(r)$
- ✓ $E_C = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 = 0 \Longrightarrow \dot{r} = 0 \Longrightarrow r \; est \; extremum$
- ✓ Pour une trajectoire circulaire $r = R \Longrightarrow \boldsymbol{E_C = 0 \Longrightarrow E_m = E_{Peff}(r) = cte}$
- ✓ Pour une trajectoire elliptique avec origine au foyer, on a un point



- P est appelé périgée (le point le plus proche au foyer origine) :

$$\boldsymbol{r_P = r_{min} \Longrightarrow \dot{r}_P = 0}$$

- A est appelé apogée (le point le plus éloigné du foyer origine)

$$\boldsymbol{r_A = r_{max} \Longrightarrow \dot{r}_A = 0}$$

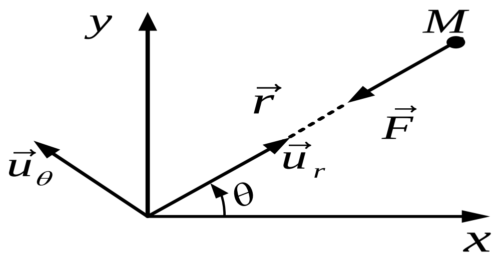
$$\vec{v}(M) = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta \Longrightarrow \boxed{\begin{cases} \boldsymbol{v_A = r_A\dot{\theta}_A} \\ \boldsymbol{v_P = r_P\dot{\theta}_P} \end{cases}}$$

$$C = r^2\dot{\theta} = r(r\dot{\theta}) \Longrightarrow \boxed{\boldsymbol{r_A v_A = r_P v_P}}$$

3.3. Etude graphique

Considérons le cas d'une interaction newtonienne. Une force newtonienne est de type :

$$\boldsymbol{\vec{F} = -m\frac{k}{r^2}\vec{u}_r}$$



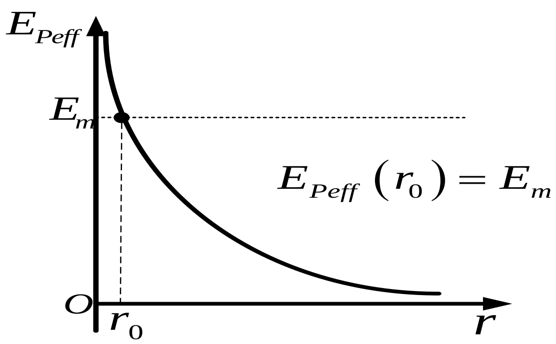
$\vec{F}(M) = F(r)\vec{u}_r$ car la force est centrale

- $k < 0$, la force est répulsive (interaction coulombienne entre 2 charges de même signe)
- $k > 0$, la force est attractive (interaction gravitationnelle ou coulombienne entre 2 charges de signe contraire)

$$\vec{F} = -m\frac{k}{r^2}\vec{u}_r \Longrightarrow E_P = -m\frac{k}{r} \Longrightarrow \boxed{\boldsymbol{E_{Peff}(r) = \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2} - m\frac{k}{r}}}$$

3.3.1. Cas d'une force centrale attractive ($k > 0$)

$k > 0 \Longrightarrow E_{Peff}(r) > 0$, $E_{Peff}(r)$ est une fonction monotone décroissante de r.



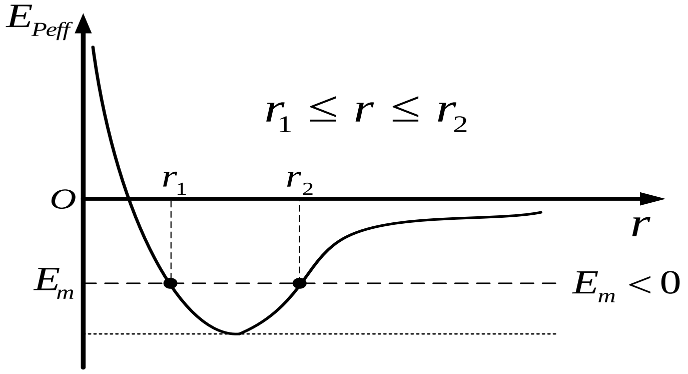
L'énergie E_m doit aussi être positive : c'est une somme de carré. La quantité $\frac{1}{2}m\dot{r}^2 = E_m - E_{peff}$ est positive ou nulle. Les valeurs de r au cours du mouvement varient entre r_0 et $+\infty$. Une particule arrivant de l'infini se rapproche du pôle ; sa vitesse radiale diminue, E_{Peff} augmentant à la distance r_0, cette vitesse s'annule et la particule s'éloigne à nouveau jusqu'à l'infini : **c'est un état de diffusion**.

$$E_m = \frac{1}{2}mv^2 - m\frac{k}{r}$$

$$E_P \xrightarrow{r\to\infty} 0 \Longrightarrow E_C \xrightarrow{r\to\infty} 0 \quad \text{car} \quad v \longrightarrow 0.$$

3.3.2. Cas d'une force centrale répulsive ($k < 0$)

Les quantités $E_m = \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2} - m\frac{k}{r} + \frac{1}{2}m\dot{r}^2$ et $E_{peff} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 - m\frac{k}{r}$ peuvent être positives ou négatives.



Pour E_m donnée, nous devons toujours avoir : $\frac{1}{2}m\dot{r}^2 = E_m - E_{peff} \ge 0$. Donc :

- Si $E_m \ge 0$ alors r doit être supérieur à r_0. Nous avons un **état de diffusion**.
- Si $E_m \le 0$ alors $r_1 \le r \le r_2$, r_1 et r_2 étant les valeurs pour lesquelles $E_{Peff} = E_m$, le point M reste à une distance finie de O : nous avons **un état lié**. La trajectoire est comprise entre les cercles de rayons r_1 et r_2 de centre O.

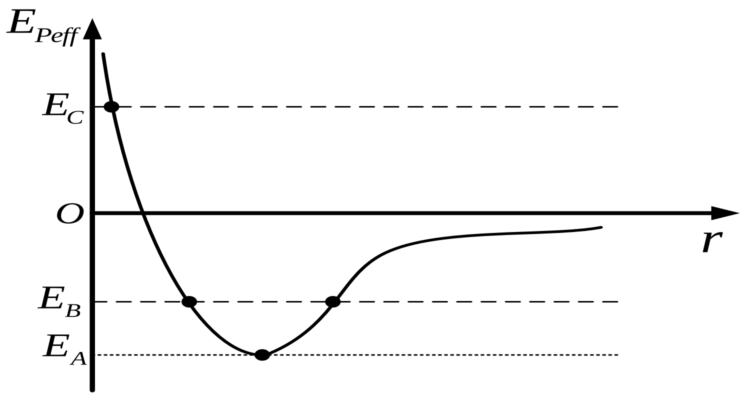
Exercice d'application

Le référentiel héliocentrique est considéré comme galiléen. Le mouvement des astres y est décrit dans un repère de coordonnées polaires (r,θ) dont le soleil occupe l'origine S.

Le soleil a pour masse $M_S = 2{,}0.10^{30}\,kg$. La constante de gravitation est $G = 6{,}67.10^{-11}\,m^3.s^{-2}.kg^{-1}$.

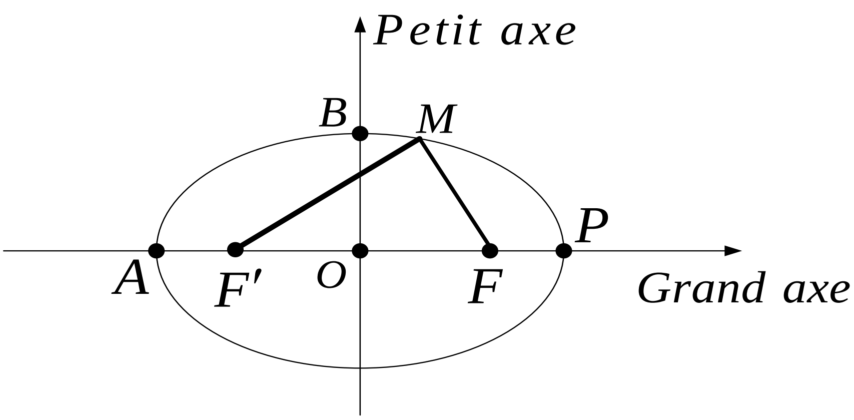
1. Exprimer la force de gravitation $\vec{F}_S$ exercée par le soleil sur un corps M de masse m situé à une distance r du centre de l'astre.

2. Lorsque le corps M est soumis à la seule force $\vec{F}_S$, montrer que le moment cinétique de M par rapport à S est conservé. En déduire la relation : $C = r^2\dot{\theta} =$ constante. Quelle autre grandeur est conservée au cours du mouvement de M ?
3. Par application du principe fondamental de la dynamique à un corps soumis à la seule force de gravitation, déterminer la durée de révolution, calculée en jours, d'un corps suivant une orbite héliocentrique circulaire de rayon $r_0 = 2{,}3.10^{11}$m.
4. Montrer que dans le cas général, c'est à dire pour une trajectoire de M qui n'est pas nécessairement circulaire, l'énergie mécanique peut se mettre sous la forme $E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + E_{Peff}(r)$, où l'on exprimera l'énergie potentielle efficace E_{Peff} en fonction de r et des constantes G, m, M_S et C.
5. L'énergie potentielle efficace est représentée sur la figure ci-dessous. Décrire qualitativement, en le justifiant, les trajectoires suivies par des corps dont les énergies seraient respectivement égales à E_A, E_B et E_C schématisées par des lignes horizontales sur la figure.



4. Quelques rappels sur l'ellipse

Soit une ellipse de foyers F et F' de demi-grand axe a.



$\forall M \in$ plan, $FM + F'M = 2a$. On note O milieu de $[FF']$. P est le péricentre : point le plus proche de F. A est l'apocentre : point le plus éloigné de F.

$P \in$ l'ellipse $\Longrightarrow FP + F'P = 2a \Longrightarrow (OP - OF) + (F'O + OP) = 2a \Longrightarrow OP = a.$

De même comme $A \in$ l'ellipse $\Longrightarrow OA = a.$

$\left.\begin{matrix} OP = a \\ OA = a \end{matrix}\right\} \Longrightarrow OP + OA = a + a = 2a \Longrightarrow AP = 2a$ d'où le nom demi-grand axe pour a.

c : distance entre les foyers $c = OF = OF'$. b : demi-petit axe de l'ellipse $b = OB$

$B \in$ l'ellipse $\Longrightarrow FB + F'B = 2a \Longrightarrow 2FB = 2a \Longrightarrow \sqrt{OF^2 + OB^2} = a \Longrightarrow \boxed{\boldsymbol{a^2 = b^2 + c^2}}$.

L'excentricité e vaut :

$$\boxed{\boldsymbol{e = \frac{c}{a} \qquad e \in [0;1]}}$$

Le paramètre de l'ellipse est :

$$\boxed{\boldsymbol{p = a(1 - e^2) = \frac{b^2}{a}}}$$

5. Applications à la mécanique céleste

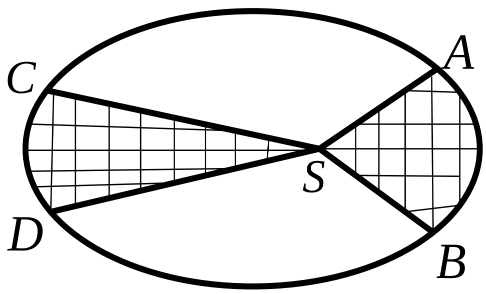
5.1. Hypothèses du mouvement

- Le référentiel de Kepler ou héliocentrique dont l'origine est le centre du soleil.
- Les planètes sont soumises à la seule action du soleil.
- La masse des planètes est négligeable devant celles du soleil.
- Le soleil étant à symétrie sphérique, il exerce sur les planètes des forces de type newtoniennes.

5.2. Lois de Kepler

Les lois de Kepler sont au nombre de 3 :

1. Les planètes ont des orbites elliptiques dont le soleil est l'un des foyers
2. Pendant des durées égales, le rayon vecteur balaye des aires égales.



Si la planète parcourt $\widehat{AB}$ ou $\widehat{CD}$ pendant une même durée, alors les aires balayées par le rayon vecteur (aires hachurées) sont égales.

3. Le carré de la période de révolution est proportionnel au cube du demi-grand axe. La constante de proportionnalité est la même pour toutes les planètes.

Les lois 1 et 2 ont été démontrées et sont dues à la force centrale en $1/r^2$. Démontrons la 3ème loi :

- L'aire de l'ellipse est donnée par $S = \pi ab$ où a et b sont respectivement le demi-grand axe et le demi-petit axe de l'ellipse.
- La loi des aires s'écrit :

$$\frac{dS}{dt} = \frac{C}{2} \Longrightarrow \frac{S}{T} = \frac{C}{2} = \frac{\pi ab}{T} \Longrightarrow \frac{\pi^2 a^2 b^2}{T^2} = \frac{C^2}{4} = \frac{kp}{4}$$

$$p = \frac{b^2}{a} \Longrightarrow \frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{k} = cte$$

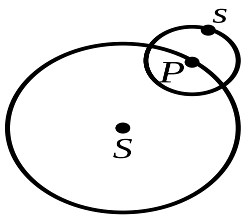
$$k = GM_S \Longrightarrow \boxed{\boldsymbol{\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_S}}}$$

Ce rapport est indépendant de la planète.

$$\boxed{\boldsymbol{\frac{T^2}{a^3} = cte}}$$

5.3. Application à la détermination de la masse des astres

Notons S le soleil de masse M_S, P ne planète de masse m_P, s un satellite de cette planète de masse m_s



Nous supposerons que $M_S \gg m_P \gg m_s$. L'action de P sur s est beaucoup plus importante que celle de S sur s car S est beaucoup plus éloigné de s. En conséquence s est soumis à l'action de P.

$$\Longrightarrow \frac{T'^2}{a'^3} = \frac{4\pi^2}{Gm_p} \qquad (1)$$

$T' =$ période de révolution de s par rapport à un référentiel galiléen et lié à P.

De même P est soumise aux actions de s et S. Celle de S est prépondérante car le soleil a une masse plus grande.

$$\Rightarrow \frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_S} \qquad (2)$$

$T =$ période de révolution de P par rapport à un référentiel de Kepler.

$$\frac{(2)}{(1)} \Rightarrow \frac{\frac{T^2}{a^3}}{\frac{T'^2}{a'^3}} = \frac{\frac{4\pi^2}{GM_s}}{\frac{4\pi^2}{Gm_p}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\boldsymbol{m_p = M_S \left(\frac{a'}{a}\right)^3 \left(\frac{T}{T'}\right)^2}}$$

6. Applications à l'étude des satellites artificielles de la terre

6.1. Hypothèses du mouvement

- Le référentiel de définition du mouvement est le référentiel géocentrique supposé galiléen.
- La seule force agissant sur le satellite est la force de gravitation due à la terre (l'hypothèse reste valable pour $r < 10\ R_T$, $R_T =$ rayon de la terre).
- Terre : point matériel de masse M_T situé en son centre
- La masse m du satellite est négligeable devant celle de la terre

6.2. Expression de la vitesse sur la trajectoire

On applique le principe fondamental de la dynamique :

$$PFD \Rightarrow \frac{GM_T m}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \Rightarrow v^2 = \frac{GM_T}{r} \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{v = \sqrt{\frac{GM_T}{r}}}}$$

6.3. Expressions des grandeurs énergétiques

On peut établir les expressions des différentes grandeurs énergétiques :

- l'énergie potentielle vaut : $E_p = -\frac{GM_T m}{r}$
- l'énergie cinétique est égale à : $E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\frac{GM_T m}{r}$
- l'énergie mécanique s'écrit donc : $E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}\frac{GM_T m}{r} - \frac{GM_T m}{r} = -\frac{GM_T m}{2r}$

6.4. Relations générales (trajectoire elliptique)

Dans le cas d'une trajectoire elliptique, les énergies cinétique et potentielle varient au cours du temps et seule l'énergie mécanique est conservée. On admet que l'expression de l'énergie mécanique que l'on vient d'établir reste valable, à condition de remplacer le rayon r de la trajectoire circulaire par le demi-grand axe a de l'orbite elliptique. On a dans ce cas :

$$\boxed{E_m = -\frac{GM_T m}{2a}}$$

Si on connait l'énergie d'un satellite, cette relation permettra de déterminer le demi-grand axe de sa trajectoire.

6.5. Comparaison entre orbite circulaire et orbite elliptique

	Orbite circulaire	Orbite elliptique
E_m	$-\frac{GM_T m}{2R}$	$-\frac{GM_T m}{2a}$
T	$2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM_T}}$	$2\pi\sqrt{\frac{a^3}{GM_T}}$

Il suffit de remplacer a par R dans l'orbite elliptique pour avoir E_m et T dans l'orbite circulaire.

6.6. Vitesses cosmiques

- **Vitesse minimale de satellisation**

On envoie un satellite depuis la surface terrestre avec une vitesse $\vec{v}_0$ pour l'amener sur une trajectoire circulaire de rayon R. La vitesse du satellite sur la trajectoire vaut :

$$v_0^2 = \frac{GM_T}{r}$$

$$R_T \approx r \Longrightarrow \boxed{v_0^2 = \frac{GM_T}{R_T}} \Longrightarrow \boxed{v_0 = 7,92\ km/s}$$

C'est la vitesse limite qui correspond à la vitesse qu'il faut donner à un satellite pour le mettre en orbite autour de la terre. Si la vitesse du satellite envoyé depuis la terre est inférieure à cette vitesse v_0, le satellite retombe sur terre.

- **Vitesse de libération**

Elle correspond à la vitesse minimale nécessaire pour que le projectile quitte l'attraction gravitationnelle de la terre à partir du sol. Pour la déterminer on considère que l'on donne au système l'énergie minimale lui permettant de s'éloigner de l'infini de son point de lancement situé sur terre. Dans ces conditions, la conservation de l'énergie mécanique entre le sol terrestre (vitesse v_0) et l'infini (vitesse v_∞ et r_∞) s'écrit :

$$E_m = \frac{1}{2}mv_{lib}^2 - \frac{GM_T m}{R_T} = \frac{1}{2}mv_\infty^2 - \frac{GM_T m}{r_\infty}$$

Comme on cherche la vitesse minimale, on se place dans le cas où la vitesse à l'infini est quasi-nulle et on obtient :

$$E_m = \frac{1}{2}mv_{lib}^2 - \frac{GM_T m}{R_T} = 0 \Longrightarrow v_{lib}^2 = \frac{2GM_T}{R_T} \Longrightarrow \boxed{\boldsymbol{v_{lib} = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}}}} \Longrightarrow \boxed{\boldsymbol{v_{lib} = v_0\sqrt{2}}}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\boldsymbol{v_{lib} = 11,17\ km/s}}$$

Si $v > v_{lib}$: le projectile peut quitter l'attraction terrestre.